Mécanique des Fluides

2e année

Mesures Physiques

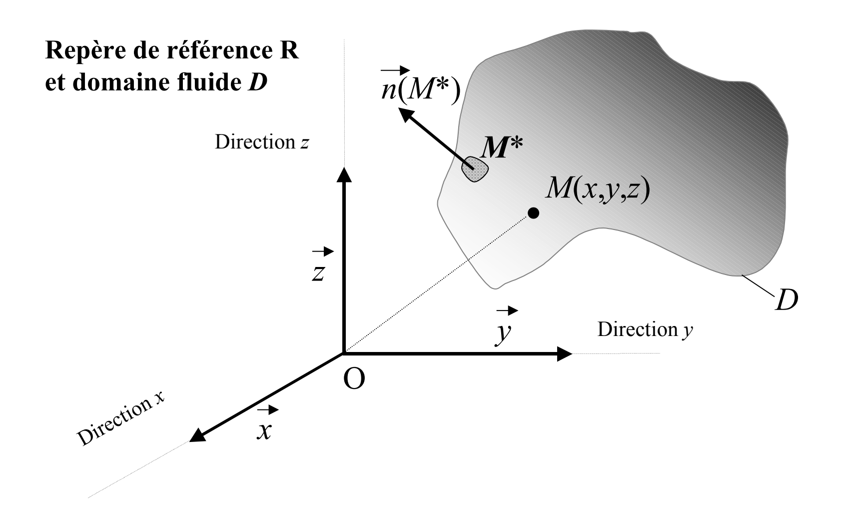
Mécanique des Fluides

STATIQUE DES FLUIDES

I- Equations

I-1 Equation intégrale

Soit un domaine *D* de fluide, de surface *S*, et au repos dans le repère d'étude R (x,y,z). En statique des fluides, on choisit en général la direction z, (de vecteur unitaire $\vec{z}$) confondue avec la verticale du lieu. Dans ce cas, l'orientation de $\vec{z}$ sera toujours « vers le haut » (*ascendante*).



M désignera un point dans *D* : $M \in D$; $\vec{n}(M)$ est le vecteur unitaire normal à *S* au point *M*.
*M** désignera un point de *S* : $M^* \in S$; $\vec{n}(M^*)$ est le vecteur unitaire normal à *S* au point *M**.
Le fluide **extérieur** à *D* est appelé complémentaire de *D*, et noté $\overline{D}$.

Ce domaine fluide est soumis à :

Des **forces à distance** (comme la gravité)

$$\boxed{d\vec{f}_g(M) = \rho(M)\,\vec{F}(M)d\omega} \qquad \text{(I-1)}$$

de **densité massique** $\vec{F}(M)$ exercée sur chaque particule élémentaire (au sens de la MMC) de masse $\rho(M)d\omega$. Ces forces sont aussi appelées **«forces de volume »**, c-à-d réparties sur tout le volume de fluide contenu dans *D*.

Des **forces de pression** exercées par le fluide extérieur à *D*. Ces **«forces de surface »** sont exercées par le complémentaire $\overline{\mathbf{D}}$ de *D* en chaque point *M** de la surface *S* et s' écrivent, en chaque point *M** :

$$\boxed{d\vec{f}(M^*) = -p(M^*)\,\vec{n}(M^*)\,dA} \qquad \text{(I-2)}$$

où on rappelle que $\vec{n}(M^*)$ est la **normale extérieure** à *D* en *M** c-à-d dirigée vers le fluide de $\overline{\mathbf{D}}$.

La condition d'équilibre de *D* s'exprime à l'aide des deux torseurs d'actions extérieures :

$$\boxed{T(F/D) + T(\overline{\mathbf{D}}/D) = 0} \qquad \text{(I-3)}$$

où $T(F/D)$ est le torseur des forces à distance, et, $T(\overline{\mathbf{D}}/D)$ est le torseur des forces de pression.

Les éléments de réduction de ces deux torseurs (résultante et moment) sont définis par :

$$T(F/D) = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(F/D) = \int_{M \in D} \rho(M)\vec{F}(M)d\omega \\ \vec{M}(O, F/D) = \int_{M \in D} \vec{OM} \wedge \rho(M)\vec{F}(M)d\omega \end{array} \right.}$$

$$T(\overline{\mathbf{D}}/D) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\overline{\mathbf{D}}/D) = \int_{M^* \in S} -p(M^*)\,\vec{n}(M^*)\,dA \\ \vec{M}(O, \overline{\mathbf{D}}/D) = \int_{M^* \in S} \vec{OM} \wedge -p(M^*)\,\vec{n}(M^*)\,dA \end{array} \right.$$

L'équation d'équilibre entre les résultantes s'écrit :

$$\boxed{\int_{M \in D} \rho(M)\,\vec{F}(M)d\omega + \int_{M^* \in S} -p(M^*)\vec{n}(M^*)dA = 0} \qquad \text{(I-4)}$$

I-2 Equation locale

Décomposons le domaine D en « particules » élémentaires parallélépipédiques (« briques ») dont chaque face est perpendiculaire à l'une des directions du repère R, et dont le centre est le point M. Le volume d'une « particule » s'écrit :

$$d\omega = dx\,dy\,dz \qquad \text{(I-5)}$$

Les forces extérieures appliquées à une « particule » sont les forces à distance, $\rho(M)\vec{F}(M)\,dx\,dy\,dz$, et les forces de pression sur chaque face du parallélépipède dont nous cherchons les expressions ci-dessous.

Si l'on appelle $p(M)$ la pression en M, on a pour la face orientée par $\vec{x}$ et située à l'abscisse $x + dx$:

$$-\left[p(M) + \frac{1}{2}\frac{\partial p(M)}{\partial x}dx \right] \vec{x}\;dydz$$

et pour la face opposée située à l'abscisse x :

$$\left[p(M) - \frac{1}{2}\frac{\partial p(M)}{\partial x}dx \right] \vec{x}\;dydz\,.$$

La force de pression suivant la direction $\vec{x}$ est la somme des deux expressions précédentes, soit :

$$-\frac{\partial p(M)}{\partial x}dx\,dy\,dz\,\vec{x} \qquad \text{(I-6)}$$

On obtient le même type d'expressions pour les quatre autres faces en permutant les vecteurs unitaires et les coordonnées.

La condition d'équilibre s'écrit donc, *pour la particule considérée* :

$$\left[\rho(M)\vec{F}(M) - \frac{\partial p(M)}{\partial x}\vec{x} - \frac{\partial p(M)}{\partial y}\vec{y} - \frac{\partial p(M)}{\partial x}\vec{z} \right] dx\,dy\,dz \quad = \quad \mathbf{0} \qquad \text{(I-7)}$$

$d\omega = dxdydz$ ne pouvant être physiquement nul, on doit avoir *en tout point M de D*:

$$\rho(M)\vec{F}(M)-\left[\frac{\partial p(M)}{\partial x}\vec{x}+\frac{\partial p(M)}{\partial y}\vec{y}+\frac{\partial p(M)}{\partial z}\vec{z}\right] \quad = \quad \mathbf{0}$$

On appelle gradient de pression **en *M***, le **vecteur** défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ p(M)=\frac{\partial p(M)}{\partial x}x+\frac{\partial p(M)}{\partial y}\vec{y}+\frac{\partial p(M)}{\partial z}\vec{z}} \qquad \text{(I-8)}$$

D'où l'équation locale (c-à-d **au point** *M*) :

$$\boxed{\rho(M)\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\ p(M) \quad = \quad \mathbf{0}} \qquad \text{(I-9)}$$

Si $\rho(M)$ est constante en tout point *M* de *D*, ou si $\rho(M)$ ne dépend que de la pression, l'équilibre du fluide n'est possible que si $\vec{F}(M)$ **dérive d'un potentiel scalaire** *U* tel que :

$$\boxed{\vec{F}(M)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,U(M)} \qquad \text{(I-10)}$$

(*U* sera précisé ultérieurement) d'où **l'équation fondamentale** de la statique des fluides:

$$\boxed{-\rho(M)\overrightarrow{\text{grad}}\,U(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\ p(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\left[p(M)+\rho(M)U(M)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad p(M)+\rho(M)U(M)=\text{Constante},\ \forall M\in D}$$

(I-11)

Les surfaces équipotentielles ($U = Cte$) et isobares ($p = Cte$) sont confondues.
En chaque point *M*, la normale commune a la direction de $\vec{F}(M)$.

Remarque 1 : **Résultante des forces de pression appliquées sur les faces d'un élément de volume.** Quelle que soit la situation (fluide au repos ou en mouvement) la somme vectorielle des forces de pression appliquées sur les 6 faces de l'élément s'exprime avec le vecteur gradient conformément à l'équation I-8:

$$d\vec{F}(M) = -\left[\overrightarrow{grad}\ p(M)\right]d\omega$$

Le gradient de pression est déterminé physiquement par l'équilibre des actions mécaniques existant dans le milieu fluide. Ainsi, en statique, il est égal au vecteur $-\rho\,\vec{g}\,d\omega$ qui n'est autre que le poids changé de signe de l'élément de fluide. En dynamique, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ p(M)$ est couplé à : (i) l'accélération $\rho\, d\vec{V}/dt$, (ii) la variation $\overrightarrow{\text{grad}}\ \left[\rho\, U(M)\right]$ de l'énergie potentielle du fluide en mouvement, (iii) aux forces de surfaces.

Remarque 2: **Equivalence entre l'intégrale de surface et l'intégrale de volume.** Sachant que

$$\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{p(M)}{\rho(M)} \qquad \text{(I-12)}$$

d'après (I-9) (fluide incompressible), on a en reportant dans (I-4),

$$\int_{M\in D}\rho(M)\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{p(M)}{\rho(M)}\,d\omega+\int_{M^*\in S}-\,p(M^*)\,n(M^*)dA=0 \qquad \text{(I-13)}$$

soit la relation remarquable :

$$\boxed{\int_{M^*\in S}p(M^*)\ n(M^*)\ dA=\int_{M\in D}\overrightarrow{\text{grad}}\ p(M)d\omega} \qquad \text{(I-14)}$$

II- Fluide homogène incompressible dans un repère terrestre (galiléen approché).

II-1 Equation locale

La densité massique de force à distance est alors l'accélération locale de la pesanteur $\vec{g}$ et dérive du potentiel U tel que :

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{z}\right] \qquad \text{(II-1)}$$

si z est la verticale ascendante du lieu, les composantes du vecteur $\vec{g}$ dans R sont alors :

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad g = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(II-2)}$$

On en déduit que U ne dépend que de z et a pour expression :

$$U(M) = gz(M) + U_0 \qquad \text{(II-3)}$$

où U_0 est une constante d'intégration.

Puisque **la masse volumique est constante en tout point de** D, $\rho(M) = \rho$, l'équation fondamentale SDF-3 s'écrit :

$$p(M) + \rho g z(M) = Cte, \quad \forall M \in D \qquad \text{(II-4)}$$

On appelle **pression motrice** le terme $p(M) + \rho g z(M)$ et on le note $p_g(M)$. L'équation SDF-5 devient donc :

$$p_g(M) = Cte, \qquad \forall M \in D \qquad \text{(II-5)}$$

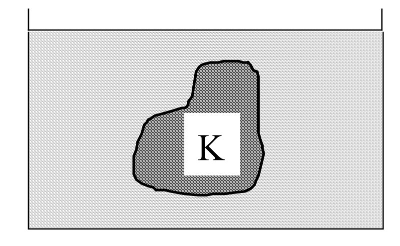
Dans un fluide au repos, la pression motrice est constante.

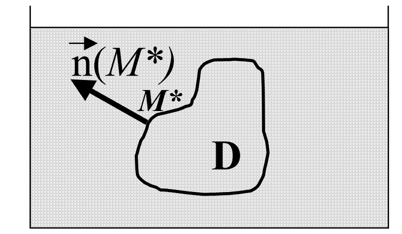
II-2 Equation des isobares et de la surface libre

Sur une isobare, $p(M) = C_M = Cte$, on peut donc écrire : $\rho g z(M) = Cte$, soit : $z(M) = H_M = cte$, c'est l'équation d'un plan horizontal de cote H_M.

La surface libre est une isobare particulière, sur laquelle $p(M^*)$ est une constante par exemple la pression atmosphérique, et d'équation : $z(M^*) = H_0$.

II-3 Equation fondamentale intégrale – Théorème d'ARCHIMEDE





Soit un corps K, de frontière (surface) S **et de volume**

$$V = \int_{M \in K} d\omega(M) \qquad \text{(II-6)}$$

immergé dans un liquide.

D'après le principe fondamental appliqué au domaine *D* de fluide qui remplace fictivement l'espace occupé par ce corps, on a :

$$\rho \vec{g} \int_{M \in D} d\omega + \int_{M^* \in S} -p(M^*)\, \vec{n}(M^*) dA = 0 \qquad \text{(II-7)}$$

D'autre part les forces de pression exercée par le fluide extérieur à *D*, (c'est-à-dire $\overline{D}$) sur la surface S s'écrivent :

$$R(\overline{D}/K) = \int_{M^* \in S} -p(M^*)\, \vec{n}(M^*)\, dA \qquad \text{(II-8)}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\vec{R}(\overline{D}/K) = -\rho \vec{g} V} \qquad \text{(II-9)}$$

C'est la formule donnée par le **théorème d'Archimède** : tout corps K immergé dans un liquide est soumis de la part de celui-ci à une poussée $\vec{R}(\overline{D}/K)$ verticale dirigée vers « le haut », de module égal au poids du volume V de liquide déplacé par le corps.

Interprétation.

En statique, la présence d'un corps immergé ne modifie pas le champ de pression dans le liquide. Le champ de pression $p(z)$ est identique, qu'il y ait ou qu'*il n'y ait pas* de corps. L'intégrale II-8 est donc identique en l'absence du corps, si on la calcule sur une surface (S) *identique à celle que le corps occupera quand on va l'immerger*. En l'absence du corps, la résultante $\vec{R}(\overline{D}/K)$ est égale à l'opposé du *poids* du volume de liquide enfermé dans (S) et en équilibre. D'où II-9 et la phrase consacrée qui suit.

III-Fluide homogène compressible dans un repère terrestre (galiléen approché).

III-1 Equation locale

On a toujours l'équation différentielle au point *M :*

$$\boxed{\frac{dp(M)}{dz} = -\rho(M)g} \qquad \text{(III-1)}$$

A/ Cas d'un LIQUIDE *compressible*

Soient : $\rho(M)$ la masse volumique du liquide à la pression en un point *M,*

$\rho_0 = \rho(M_0)$ et $p(M_0)$

la masse volumique et la pression en un point M_0 de référence dans le fluide supposé à température constante.

L'équation d'état du liquide s'écrit alors en fonction du coefficient de compressibilité isotherme du fluide, χ :

$$\rho(M) = \rho(M_0)\left[1 + \chi\left(p(M) - p(M_0)\right)\right]$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\rho(M_0)\left[1 + \chi\left(p(M) - p(M_0)\right)\right] g = -\frac{dp(M)}{dz} \qquad \text{(III-2)}$$

elle s'intègre par séparation des variables :

$$\left[1 + \chi\left(p(M) - p(M_0)\right)\right] g = e^{\chi\rho(M_0)g\,[z(M_0) - z(M)]} \qquad \text{(III-3)}$$

où $z(M_0)$ et $z(M)$ sont respectivement les cotes de M_0 et de *M*.

En général, l'exposant est très petit devant 1, on peut alors remplacer l'exponentielle par son approximation au 1er ordre, d'où :

$$p(M) - p(M_0) = \rho(M_0)g\left[z(M_0) - z(M)\right]\left[1 + \frac{\chi\,\rho(M_0)g\; z(M_0) - z(M)}{2}\right]$$

Si on choisit le point de référence sur la surface libre de cote $z(M_0) = 0$, et que M est à la profondeur $h = -z(M)$, on a :

$$\boxed{p(M) - p(M_0) = \rho(M_0)\; g\; h\left[1 + \frac{\chi\,\rho(M_0)g\;h}{2}\right]} \qquad \text{(III-4)}$$

Le terme de compressibilité ne devient significatif qu'aux profondeurs importantes. Pour l'eau, $\chi = 5E - 10\;Pa^{-1}$ dans les conditions normales, le terme $\chi\rho gh$ vaut 0,01 à partir de 2000 mètres.

B/ Cas d'un gaz.

Soient encore : $\rho(M_0)$, $p(M_0)$, $T(M_0)$, la masse volumique, la pression, la température, au point de référence M_0.

En considérant que le gaz est parfait, on a :

$$\rho(M) = \rho(M_0)\frac{p(M)}{p(M_0)}\frac{T(M_0)}{T(M)} \qquad \text{(III-5)}$$

Dans un gaz à température constante, on a :

$$\rho(M_0)\frac{p(M)}{p(M_0)}g = -\frac{dp(M)}{dz}$$

L’intégration conduit à :

$$\boxed{\frac{p(M)}{p(M_0)}g = e^{\frac{\rho(M_0)g}{p(M_0)}\left[z(M_0)-z(M)\right]}} \qquad \text{(III-6)}$$

Cette formule permet d’estimer l’évolution (décroissante) de la pression avec l’altitude.

DYNAMIQUE DES FLUIDES

I- Coordonnées de Lagrange et coordonnées d'Euler

Les coordonnées de **LAGRANGE** sont un ensemble de trois paramètres a_1, a_2, a_3, qui caractérisent la position de la particule à l'instant initial t = 0. Il s'agit des coordonnées dans le repère *fixe* de référence du point avec lequel coïncide la particule à l'instant t = 0.

Les coordonnées d'**EULER** sont un ensemble de trois paramètres $x, y, z,$ caractérisant la position de la particule à l'instant t considéré. Il s'agit des coordonnées dans le même repère fixe que précédemment, du point avec lequel coïncide la particule à l'instant t.

On notera bien que la direction *z* du repère fixe n'est pas nécessairement confondue avec la verticale du lieu.

Pour une particule donnée, donc que l'on « suit dans son mouvement » , on a pour $t > 0$:

$$\begin{array}{ll} x = f_1(a_1, a_2, a_3, t) & a_1 = g_1(x, y, z, t) \\ y = f_2(a_1, a_2, a_3, t) & a_2 = g_2(x, y, z, t) \\ z = f_3(a_1, a_2, a_3, t) & a_3 = g_3(x, y, z, t) \end{array} \qquad \text{(I-1)}$$

A l'instant initial, on a :

$$\begin{array}{l} f_1(a_1, a_2, a_3, 0) = a_1 \\ f_2(a_1, a_2, a_3, 0) = a_2 \\ f_3(a_1, a_2, a_3, 0) = a_3 \end{array} \qquad \text{(I-2)}$$

II- Vitesse

La vitesse d'une particule est décrite par ses *trois composantes u, v, w*, sur la base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du repère de référence, c'est-à-dire :

$$\vec{V} = u(x, y, z)\,\vec{x} + v(x, y, z)\,\vec{y} + w(x, y, z)\vec{z} \qquad \text{(II-1)}$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\partial x}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f_1(a_1, a_2, a_3, t) \end{aligned} \qquad \text{(II-2)}$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f_2(a_1, a_2, a_3, t) \end{aligned} \qquad \text{(II-3)}$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{aligned} \qquad \text{(II-4)}$$

III- Dérivée « particulaire »

Soit une grandeur physique scalaire ϕ liée à la particule de fluide en mouvement (concentration, masse volumique, composante de vitesse,….).

Si cette grandeur est exprimée en fonction des coordonnées d'EULER de la particule (*x,y,z*), on peut écrire :

$$\boxed{\phi(M,t)=\phi(x,y,z,t)} \qquad \text{(III-1)}$$

On appelle **dérivée particulaire** de ϕ, sa **dérivée totale par rapport au temps** pour a_1, a_2, a_3, donnés, soit :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}&=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\&=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\phi\end{aligned} \qquad \text{(III-2)}$$

$\vec{V}$ est le vecteur vitesse de la particule située en M à l'instant t.

$(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})$ désigne **l'opérateur de convection** appliqué ici à la grandeur ϕ.

Dans le cas d'une grandeur vectorielle quelconque, $\vec{A}(M,t)=\vec{A}(x,y,z,t)$, le vecteur $d\vec{A}/dt$ a pour composantes les dérivées particulaires de chaque composante :

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\begin{cases}\dfrac{dA_x}{dt}=\dfrac{\partial A_x}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})A_x\\[2mm]\dfrac{dA_y}{dt}=\dfrac{\partial A_y}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})A_y\\[2mm]\dfrac{dA_z}{dt}=\dfrac{\partial A_z}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})A_z\end{cases} \qquad \text{(III-3)}$$

IV- Accélération

Lorsque la grandeur vectorielle $\vec{A}$ est la vitesse de la particule au point M à l'instant t, on obtient le vecteur accélération et ses trois composantes cartésiennes :

$$\vec{\Gamma}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}=\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,u\\[2mm]\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\partial v}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,v\\[2mm]\dfrac{dw}{dt}=\dfrac{\partial w}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,w\end{cases} \qquad \text{(IV-4)}$$

Le terme $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ représente l'**accélération locale** ou temporelle.

Le terme $(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}$ représente l'**accélération convective**.

Le vecteur accélération peut se mettre sous la forme qui fait apparaître la **vorticité**

$$\boxed{\vec{\omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}} \qquad \text{(IV-5)}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\frac{V^2}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) \wedge \vec{V}$$
$$= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\frac{V^2}{2} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} \qquad \text{(IV-6)}$$

V- Champ des vitesses dans un écoulement permanent (ou *stationnaire*).

On dit que l'écoulement est permanent ou stationnaire si ses propriétés ne dépendent pas explicitement du temps.

En particulier, la vitesse ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire que les composantes sont des fonctions uniquement des coordonnées d'EULER *x, y, z*.
On a donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \qquad \text{(V-1)}$$

Les composantes du vecteur accélération se réduisent à :

$$\Gamma_x = (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, u \qquad \Gamma_y = (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, v \qquad \Gamma_z = (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, w \qquad \text{(V-2)}$$

L'expression du vecteur accélération ne contient alors que l'accélération convective :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{V^2}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) \wedge \vec{V} \qquad \text{(V-3)}$$

Si l'écoulement est stationnaire les trajectoires et les lignes de courant sont confondues.

VI. Ecoulement irrotationnel.

On dit qu'à un instant t donné, l'écoulement est irrotationnel dans le domaine D si le rotationnel de la vitesse $\vec{V}(M,t)$ est nul en chacun des points M de D. Le rotationnel est un vecteur (défini en cinématique des fluides) qui caractérise en un point M, la rotation dans l'espace de la particule fluide.

Il s'écrit symboliquement :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M,t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}(M,t) \qquad \text{(VI-1)}$$

Il s'écrit par exemple en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M,t) = \left[\frac{\partial w(M,t)}{\partial y} - \frac{\partial v(M,t)}{\partial z}\right]\vec{x} + \left[\frac{\partial u(M,t)}{\partial z} - \frac{\partial w(M,t)}{\partial x}\right]\vec{y} + \left[\frac{\partial v(M,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(M,t)}{\partial y}\right]\vec{z} \qquad \text{(VI-2)}$$

VII. Equation locale de conservation de la masse.

Soit un domaine D de fluide que l' « on suit dans son mouvement ».
La masse m de liquide contenue dans D est constante dans le temps et dans l'espace (c-à-d au cours de l'écoulement).

La dérivée particulaire de m est donc nulle : $\frac{dm}{dt} = 0$

On écrit m sous forme de l'intégale de volume :

$$m = \int_{M \in D} \rho(M,t)\, d\omega$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{M \in D} \rho(M,t) d\omega = \int_{M \in D} \left[\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left[\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)\right] \right] d\omega = 0 \qquad \text{(VII-1)}$$

Cette relation[1] s'applique à tout élément de volume, et donc en particulier au volume élémentaire $d\omega$; ainsi, en supprimant le signe d'intégration, on obtient l'équation dite **<u>équation de continuité</u>** ou de **<u>conservation de la masse</u>** :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left[\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)\right] = 0} \qquad \text{(VII-2)}$$

Comme

$$\mathrm{div}\left[\rho \vec{V}\right] = \rho\, \mathrm{div} \vec{V} + \left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\rho$$

on peut faire apparaître la dérivée particulaire de la masse volumique, fonction scalaire du point M et du temps t :

$$\boxed{\frac{d\rho(M,t)}{dt} + \rho(M,t)\, \varepsilon = 0} \qquad \boxed{\varepsilon = \mathrm{div} \vec{V}(M,t)} \qquad \text{(VII-3)}$$

Lorsque la dérivée particulaire de la masse volumique $d\rho / dt$ est nulle en tout point, on a $\mathrm{div} \vec{V}(M,t) = 0$ et l'écoulement est **isovolume**.

On montre en effet que ε représente le taux de déformation cubique (ou vitesse de *dilatation*) de la particule située au point M.

Il est important de se souvenir dans quel cas $d\rho / dt = \partial \rho / \partial t + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\rho = 0$.

Statique des Fluides : $\partial \rho / \partial t = 0$ et $\vec{V} = 0 \Rightarrow d\rho / dt = 0$;

Fluides homogènes, incompressibles et indilatables : $\partial \rho / \partial t = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \rho = 0 \Rightarrow d\rho / dt = 0$;

Lignes de courant confondues avec les lignes isochores (où $\rho = Cte$ **) et masse volumique constante dans le temps (fluide inhomogène) :** $\partial \rho / \partial t = 0$ et $\vec{V}$ est perpendiculaire à $\mathbf{grad}\, \rho \Rightarrow d\rho / dt = 0$

Lorsque l'écoulement est permanent ou stationnaire (le mouvement ne dépend pas explicitement du temps), la dérivée partielle de la masse volumique par rapport au temps est nulle :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left[\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)\right] = \mathrm{div}\left[\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)\right] = 0} \qquad \text{(VII-4)}$$

---

[1] On appelle « **divergence** » d'un vecteur $\vec{V} = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$ la quantité (scalaire) : $\mathrm{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

On dit alors que le champ de vecteurs $\rho\vec{V}$ est conservatif.

VIII. Equation intégrale de conservation de la masse. Débit de liquide à travers une section de passage.

VIII-1 Equation intégrale

Reprenons l'équation de conservation :

$$\int_{M\in D}\left[\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}+\mathrm{div}\left[\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)\right]\right]d\omega=\int_{M\in D}\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\omega+\int_{M\in D}\mathrm{div}\left[\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)\right]d\omega \qquad \text{(VIII-1)}$$

et transformons la deuxième intégrale de volume en une intégrale de surface en exprimant que la divergence du vecteur $\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)$ dans le domaine D est égal au flux de ce vecteur à travers S:

$$\int_{M\in D}\mathrm{div}\left[\rho(M,t)\ \vec{V}(M,t)\right]d\omega=\int_{M^*\in S}\rho(M^*,t)\ \vec{V}(M^*,t)\ \vec{n}(M^*)dA \qquad \text{(VIII-2)}$$

Or la projection

$$\boxed{\vec{V}(M^*,t)\ \vec{n}(M^*)dA=\vec{V}(M^*,t)d\vec{A}=dq_V} \qquad \text{(VIII-3)}$$

est le **débit élémentaire volumique** dq_V à travers l'élément de surface dA orienté par $\vec{n}(M^*)$. Ainsi on a :

$$\int_{M\in D}\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\omega+\int_{M^*\in S}\rho(M^*,t)\ dq_V(M^*)=0$$

Lorsque le mouvement du fluide (écoulement) ne dépend pas du temps, on a $\partial\rho/\partial t=0$ et donc :

$$\boxed{\int_{M\in D}\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\omega=0\quad\Rightarrow\quad\int_{M^*\in S}\rho(M^*,t)dq_V(M^*)=0} \qquad \text{(VIII-4)}$$

Dans les applications où le fluide est incompressible, $\rho(M^*,t)=\rho=Cte$ peut être « sortie » de l'intégrale :

$$\boxed{\int_{M^*\in S}\rho(M^*,t)dq_V(M^*)=\ \rho\int_{M^*\in S}dq_V(M^*)=0\quad\Rightarrow\quad q_V=0} \qquad \text{(VIII-5)}$$

L'intégrale de surface $\int_{M^*\in S}dq_V(M^*)$ est tout simplement le débit en volume total à travers l'enveloppe S du domaine fluide D. On voit que ce flux total est nul.

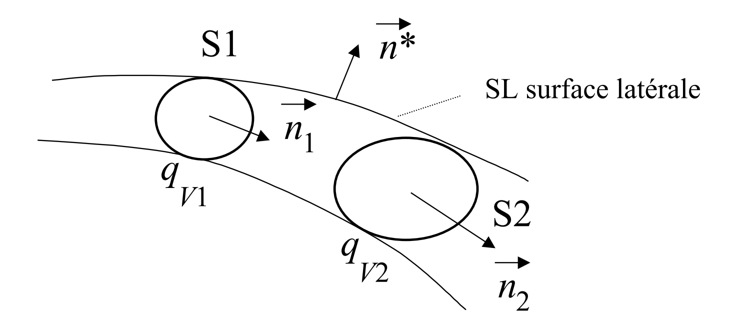
Si la masse volumique n'est pas constante, il faut raisonner sur le débit en masse, $dq_m=\rho dq_V$, d'où :

$$\boxed{\int_{M^*\in S}\rho(M^*,t)dq_V(M^*)=\ \int_{M^*\in S}dq_m(M^*)=0\quad\Rightarrow\quad q_m=0} \qquad \text{(VIII-6)}$$

VIII-2 Débit à travers *la section droite* d'un tuyau.

Ici le domaine *D* de fluide est un tronçon de tube constitué par une surface amont S1, une surface aval S2, et une surface latérale SL. Pour le débit en volume, en tout point de SL la projection $\vec{V}(M^*,t)\,\vec{n}(M^*)dA = \vec{V}(M^*,t)d\vec{A} = dq_V$ est nulle, puisque le liquide ne peut traverser la paroi (la vitesse est perpendiculaire à la normale). Il en est de même pour le débit en masse.

Le débit en volume est utilisé en pratique pour les fluides incompressibles.
Le débit en masse est utilisé en pratique pour les fluides compressibles (gaz).



on a donc :

$$q_V = q_{V1} + q_{V2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{V1} = -q_{V2} \quad ou: \quad |q_{V1}| = |q_{V2}| = CTE$$

Le **débit en volume** est <u>constant</u> à travers les sections droites

$$q_m = q_{m1} + q_{m2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{m1} = -q_{m2} \quad ou: \quad |q_{m1}| = |q_{m2}| = CTE$$

Le **débit en masse** est <u>constant</u> à travers les sections droites

Remarque : le signe du débit dépend de l'orientation choisie pour la normale à la section droite. Si $\vec{n}$ est dans le sens de l'écoulement, le débit est positif, négatif dans le cas contraire.

Si on raisonne (cas fréquent) sur les valeurs absolues, on utilise la valeur absolue $|q_V|$ pour le débit en volume, $|q_m|$ pour le débit en masse.

IX. Principe fondamental de la dynamique appliqué à un fluide parfait– Equation d'EULER

On cherche la relation entre le mouvement des particules fluides et les forces qui s'exercent sur ces particules.

On applique ci-dessous le PFD à un domaine *D* de fluide que l'on suit dans son mouvement.

M est un point de *D*.

S désignera l'enveloppe (ou surface) de *D*.

*M** est un point de S

Le mouvement est étudié dans un repère absolu $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

IX-1 Théorème de la résultante en fluide parfait

A chaque instant, la quantité d'accélération $\vec{A}_{/R}(D,t)$ du domaine *D* est égale à la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur *D* (on reprend les notations vues en statique des fluides):

$$\boxed{\vec{A}_{/R}(D,t) = \vec{R}(F/D) + \vec{R}(D/D)} \qquad \text{(IX-1)}$$

Ces forces comportent les forces de gravité $\vec{R}(F/D)$ de densité massique $\vec{g}$,

$$\boxed{\vec{R}(F/D) = \int_{M\in D} \rho(M,t)\,\vec{g}\,d\omega} \qquad \text{(IX-2)}$$

et la résultante $\vec{R}(\overline{D}/D)$ des forces de surface exercées par le complémentaire $\overline{D}$ de *D* (fluide extérieur) sur l'enveloppe S ,

$$\boxed{\vec{R}(\overline{D}/D) = \int_{M^*\in S} -p(M^*,t)\,\vec{n}(M^*)\,dA} \qquad \text{(IX-3)}$$

où $\vec{n}(M^*)$ est la normale extérieure (unitaire) au point M^* de S.

$\vec{R}(\overline{D}/D)$ représente la résultante des forces de pression qui s'exercent sur S à l'instant considéré.

La quantité d'accélération d'une particule étant égale à $\rho(M,t)\dfrac{d\vec{V}(M,t)}{dt}d\omega$, la quantité d'accélération de *D* (ou résultante des quantités d'accélération du domaine *D*) est donnée par l'intégrale :

$$\boxed{\vec{A}_{/R}\rho(M,t) = \int_{M\in D} \rho(M,t)\,\frac{d\vec{V}(M,t)}{dt}\,d\omega} \qquad \text{(IX-4)}$$

Finalement, le PFD stipule que :

$$\boxed{\int_{M\in D} \rho(M,t)\,\frac{d\vec{V}(M,t)}{dt}\,d\omega = \int_{M\in D} \rho(M,t)\,\vec{g}\,d\omega + \int_{M^*\in S} -p(M^*,t)\,\vec{n}(M^*)dA} \quad \text{(IX-4)}$$

L'intégrale des pressions sur la surface peut s'écrire aussi sous la forme d'une intégrale de volume (ceci se traduit physiquement par la poussée d'Archimède en statique des fluides) :

$$\boxed{\int_{M^*\in S} -p(M^*,t)\,\vec{n}(M^*)dA = \int_{M\in D} -\overrightarrow{\text{grad}}\left[p(M^*,t)\ \right]dA} \qquad \text{(IX-5)}$$

Il s'ensuit :

$$\int_{M\in D} \left[\rho(M,t)\frac{d\vec{V}(M,t)}{dt} - \rho(M,t)\,\vec{g} + \overrightarrow{\text{grad}}\,p(M^*,t)\,\vec{n}(M^*)d\omega\right] = \mathbf{0}$$

Localement, pour une particule fluide de centre *M*, l'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\boxed{\rho(M,t)\frac{d\vec{V}(M,t)}{dt} = \rho(M,t)\,\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p(M,t)} \qquad \text{(IX-6)}$$

Cette relation est appelée **équation d'EULER**.

L'accélération de la pesanteur s'écrit en introduisant le potentiel scalaire *U(M)*:

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}[U(M)]$$
$$U(M) = g\ \mathbf{Z}(M) \qquad \text{(IX-7)}$$

où **Z**(M) est **la cote** du point M sur l'axe vertical ascendant du lieu (et non la coordonnée z).

Si la masse volumique est constante, on a :

$$\frac{d\vec{V}(M,t)}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\big[U(M)\big] - \overrightarrow{\text{grad}}\left[\frac{p(M,t)}{\rho(M,t)}\right]$$
$$= -\overrightarrow{\text{grad}}\left[U(M) + \frac{p(M,t)}{\rho(M,t)}\right]$$

Utilisons l'expression de l'accélération :

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\frac{V^2}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}) \wedge \vec{V}} \qquad \text{(IX-8)}$$

$$\frac{\partial V(M,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\frac{V^2(M,t)}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M,t) \wedge \vec{V}(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left[U(M) + \frac{p(M,t)}{\rho(M,t)}\right]$$
$$\frac{\partial V(M,t)}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M,t) \wedge \vec{V}(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left[\frac{V^2(M,t)}{2} + U(M) + \frac{p(M,t)}{\rho(M,t)}\right]$$

Posons :

$$\boxed{H(M,t) = \frac{V^2(M,t)}{2} + U(M) + \frac{p(M,t)}{\rho(M,t)}} \qquad \text{(IX-9)}$$

le premier membre de l'équation précédente vérifie donc :

$$\boxed{\frac{\partial V(M,t)}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M,t) \wedge \vec{V}(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\ H(M,t)} \qquad \text{(IX-10)}$$

IX-2 Intégrale première de l'équation du mouvement stationnaire Equation de Daniel BERNOULLI (1700-1782)..

En mouvement stationnaire, on a en tout point M :

$$\frac{\partial V(M,t)}{\partial t} = 0 \qquad \text{(IX-11)}$$

De plus comme

$$\boxed{dH = \overrightarrow{\text{grad}}\ H(M,t) \cdot d\vec{\ell}} \qquad \text{(IX-12)}$$

la fonction H doit vérifier :

$$\boxed{-(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M,t) \wedge \vec{V}(M,t) \cdot d\vec{\ell} = dH} \qquad \text{(IX-13)}$$

Ainsi, selon que la direction du vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ est confondue avec la vitesse $\vec{V}(M,t)$ ou le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M,t)$, on obtient respectivement**, pour les intégrales *H***, les propriétés suivantes :

$d\vec{\ell}$ colinéaire à $\vec{V}(M,t) \;\Rightarrow\; H(M,t) = \textbf{Constante}$	sur une ligne de courant ;
$d\vec{\ell}$ colinéaire à **rot** $\vec{V}(M,t) \;\Rightarrow\; H(M,t) = \textbf{Constante}$	sur une ligne tourbillon

Une ligne tourbillon est tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon.
Dans un écoulement rotationnel, *H* est diffère d'une ligne tourbillon à une autre.

IX-3 Equation de BERNOULLI

On appelle **équation de BERNOULLI l'intégrale *constante*** de l'équation du mouvement sur une ligne de courant. Elle s'applique au cas **d'un fluide parfait, en écoulement permanent et irrotationnel**.

On a donc pour une ligne de courant donnée *Li*:

$$\forall M \in Li, \quad H(M,t) = \frac{V^2(M,t)}{2} + U(M) + \frac{p(M,t)}{\rho(M,t)} = \textbf{Constante} \qquad \textbf{(IX-14)}$$

Si, dans l'écoulement, le rotationnel est nul en tout point , alors la fonction *H* est la même pour toutes les lignes de courant, c'est-à-dire dans tout le fluide :

X- Aspect énergétique de l'équation de BERNOULLI

Raisonnons sur le **<u>travail des forces</u>** subies par la particule de volume $d\omega$ lorsqu'elle effectue un déplacement donné par le vecteur déplacement

$$d\vec{\ell} = dx\,\vec{\boldsymbol{x}} + dy\,\vec{\boldsymbol{y}} + dz\,\vec{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(X-1)}$$

Ces forces sont :

-Les **forces de pression** au point M, d'intensité $d\vec{F}_p(M) = \left[-\overrightarrow{\text{grad}}\,p(M)\right]d\omega$, (X-2)

-Les **forces de pesanteur** : $d\vec{F}_g(M) = -\rho d\omega\, g\,\vec{\mathbf{z}} = \rho d\omega\,\vec{g} = -\rho\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U(M)\,d\omega$. (X-3)

Lorsque la particule effectue un déplacement $d\vec{\ell}$, le travail des forces de pression et de pesanteur est égal à la variation d'énergie cinétique :

$$\delta W_p + \delta W_g = \delta E_c \qquad \text{(X-4)}$$

$$\delta E_c = d\left[\rho d\omega\, V^2(M)/2\right]$$

$$\delta W_p = d\vec{F}_p(M)\cdot d\vec{\ell} = \left[-\overrightarrow{\text{grad}}\,p(M)\right]d\omega\cdot d\vec{\ell} \qquad \delta W_g = d\vec{F}_g(M)\cdot d\vec{\ell} = \rho\left[-\overrightarrow{\text{grad}}\,U(M)\right]d\omega\cdot d\vec{\ell} \qquad \text{(X-5)}$$

On se rappellera ici que la différentielle d'une fonction scalaire *f*(*M*) peut s'écrire :

$$df(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f(M)\cdot d\vec{\ell} \qquad \text{(X-6)}$$

Le travail de la pression et de la pesanteur s'écrivent donc :

$\delta W_p = dp(M)\, d\omega$

$\delta W_g = \rho\, dU(M)\, d\omega = d[\rho U(M)]\, d\omega$

Soit :

$$\begin{aligned} d[\rho d\omega\, V^2(M)/2] &= dp(M) d\omega + d[\rho U(M)] d\omega \\ 0 &= d[p(M) + \rho U(M) + \rho\, V^2(M)/2]\, d\omega \end{aligned} \qquad \text{(X-7)}$$

Comme le volume $d\omega$ de la particule ne peut être nul, on en déduit que c'est la différentielle qui est nulle :

$$d[p(M) + \rho U(M) + \rho\, V^2(M)/2] = dPt = 0$$

$$Pt(M) = p(M) + \rho U(M) + \frac{1}{2}\rho\, V^2(M)$$

La différentielle d'une fonction constante étant nulle, on en déduit que la fonction $Pt(M)$, que l'on appelle **pression totale, est constante :**

$$Pt(M) = p(M) + \rho U(M) + \rho\, V^2(M)/2 = \textbf{Constante} \qquad \text{(X-8)}$$

C'est l'expression mathématique du théorème de **Daniel BERNOULLI :** dans un écoulement irrotationnel de fluide parfait incompressible, dans le champ de pesanteur, la pression totale est constante sur une ligne de courant.

Dans cette démonstration, on s'est attaché à une particule fluide donnée. Le résultat concerne donc implicitement la même ligne de courant.

Si l'écoulement est de plus irrotationnel en tout point, la pression totale est identique en tout point.

XI- L'équation de BERNOULLI, en pratique

D'abord :

On remarquera *que les trois termes de l'équation de Bernoulli doivent se compenser en tout point M* de la ligne de courant considérée, de manière à ce que la pression totale soit CONSTANTE*.*

Ensuite :

La pression totale a la dimension d'une pression ($\mathbf{ML^{-1}T^{-2}}$), son unité SI est le Pa.
La pression totale étant homogène à une pression, elle peut être exprimée par une hauteur de fluide équivalente qui a la dimension d'une longueur (**L**).

Selon l'unité de travail choisie, les différents termes de l'équation de Bernoulli sont dénommés comme suit :

Formulation homogène à une **pression** ($\mathbf{ML^{-1}T^{-2}}$)	Formulation homogène à une **longueur** (**L**) ou **hauteur équivalente**
$Pt(M) = p(M) + \rho g\, \mathbf{Z}(M) + \rho V^2(M)/2$	$H(M) = \dfrac{p(M)}{\rho g} + \mathbf{Z}(M) + \dfrac{V^2(M)}{2g}$

$Pt(M) = \text{Pression totale}$	$H(M) = \text{Charge, ou hauteur totale}$
$p(M) + \rho g \mathbf{Z}(M) = \text{Pression motrice}$	$\dfrac{p(M)}{\rho g} + \mathbf{Z}(M) = \text{Hauteur piézométrique}$
$\rho V^2(M)/2 = \text{Pression dynamique}$	$\dfrac{V^2(M)}{2g} = \text{Hauteur cinétique}$

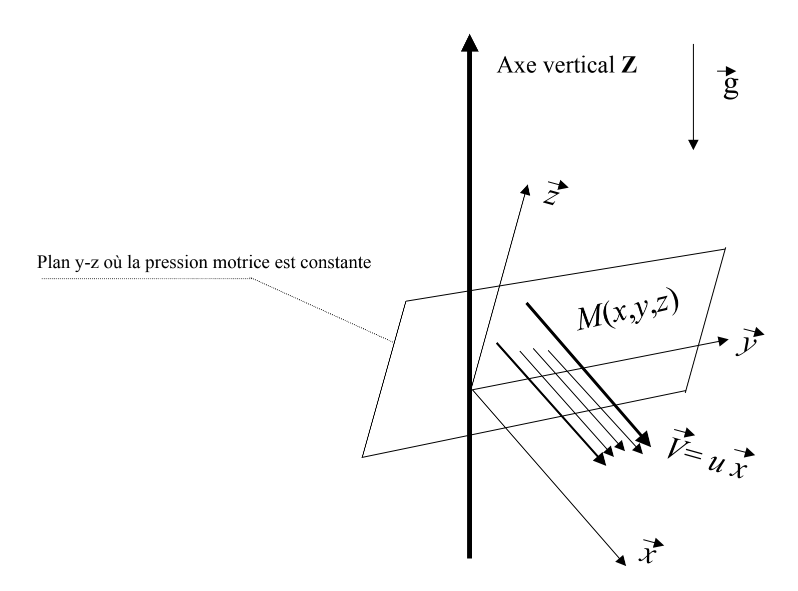
XII- Pression motrice dans un écoulement unidirectionnel stationnaire

On rappelle que la pression motrice est définie en un point M à l'instant t par :

$$\boxed{p_g(M) = p(M) + \rho g\, \mathbf{Z}(M)} \qquad \text{(XII-1)}$$

et que **Z**(M) est la **cote** du point M sur la verticale ascendante du lieu.

Il n'y pas forcément une relation simple entre z(M) coordonnées de M sur l'axe z du repère d'étude et **Z**(M), contrairement à la statique des fluides. Dans la figure ci-dessous on a par exemple représenté un écoulement descendant. $\partial \mathbf{Z} / \partial x$ représentera la pente de l'écoulement.



Considérons le cas simple mais instructif d'un écoulement stationnaire de fluide incompressible de la forme :

$$\vec{V}(M) = u(M)\vec{x} \qquad \text{(XII-2)}$$

Les vitesses sont toujours colinéaires à $\vec{x}$. L'équation locale de continuité se réduit ici à $\text{div}\vec{V} = 0$, d'où :

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ est indépendante de } x \qquad \textbf{(XII-3)}$$

Ainsi dans un tel mouvement, la vitesse ne peut être que constante ; c'est un écoulement uniforme.

Les composantes Γ_y et Γ_z de l'accélération sont nulles ; seules Γ_x peut être non nulle :

$$\Gamma_y = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[p + \rho g\,\mathbf{Z}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad p + \rho g\,\mathbf{Z} \text{ est indépendante de } y$$

$$\Gamma_z = \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[p + \rho g\,\mathbf{Z}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad p + \rho g\,\mathbf{Z} \text{ est indépendante de } z$$

(XII-4)

Ainsi la pression motrice $p_g = p + \rho g\mathbf{Z}$ est constante perpendiculairement au plan de l'écoulement uniforme. On dit alors que la pression p a une répartition hydrostatique car cette répartition est identique à celle donnée par la statique des fluides.

XIII. Ecoulement d'un fluide visqueux newtonien incompressible.

XIII-1 Ecoulement interne et écoulement externe

Les écoulements de fluide visqueux peuvent être divisés en deux catégories :

1/ Les écoulements internes qui sont limités par des parois (écoulements dans les tuyaux, canaux, tuyères…) ;

2/ Les écoulements externes, qui sont des mouvements de fluides autour de corps tels que des avions, fusées, voitures, etc…

XIII-2 Ecoulement laminaire et écoulements turbulent

Un ***écoulement turbulent*** peut être caractérisé par une orientation aléatoire (ou fluctuation) des vecteurs vitesses en chaque point ; autrement dit chaque composate $u(M,t)$, $v(M,t)$, $w(M,t)$, de $\vec{V}(M,t)$ obéissent à des lois de distributions (au sens probabiliste) en fonction de l'espace et du temps. On dit que le régime de l'écoulement est turbulent. Un écoulement turbulent peut posséder une **composante moyenne** $\vec{U}$ (le mouvement global se fait d'ouest en en est par exemple) pouvant dépendre du temps mais de manière plus « régulière »; les fluctuations ont alors lieu *autour* de cette composante moyenne, de sorte que la vitesse s'écrit :

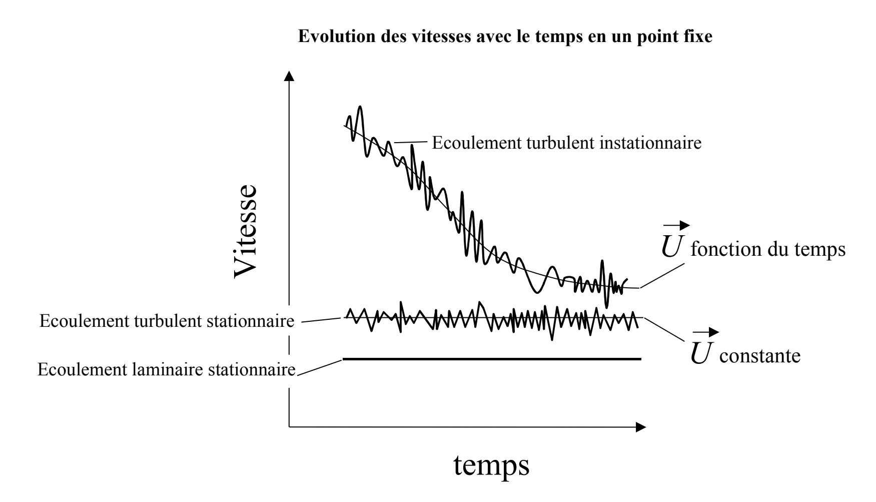
$$\vec{V}(M,t) = \vec{U} + \vec{v'} \qquad \text{(XIII-1)}$$

C'est alors sur $\vec{v'}$ que l'on fait apparaître des lois statistiques.

Dans un ***écoulement laminaire***, le mouvement du fluide s'effectue en « couches » parallèle entre elles, chaque couche possédant sa propre vitesse ; le profil de vitesses dans le fluide en mouvement est bien ordonné. Les vecteurs vitesse conservent une orientation stable au cours du temps. On dit que le régime de l'écoulement est laminaire.

Lorsque le mouvement laminaire du fluide dégénère en un écoulement turbulent , il perd son caractère ordonné et stable ; on dit qu'il y a transition du régime laminaire vers le régime turbulent, ou plus simplement transition laminaire turbulent.

La différence entre le régime turbulent et le régime laminaire peut être représentée par les courbes donnant la vitesse en fonction du temps *en un point M fixe*.

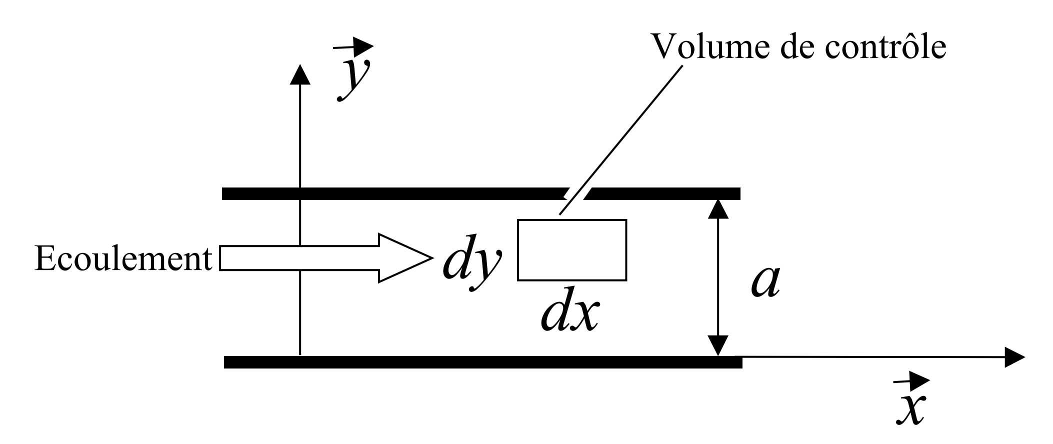


XIII-3 Ecoulement laminaire établi entre deux plaques parallèles infinies

Le fait de considérer un écoulement stationnaire permet de se ramener à un problème indépendant du temps.

Le fait de considérer un écoulement établi permet de se ramener à un problème indépendant de l'abscisse x : le mouvement n'est ni accéléré ni ralenti selon la position sur l'axe x ; u ne dépend pas de x.
Le fait de considérer des plaques infinies permet de se ramener à un problème plan (à deux dimensions) ; autrement dit, la répartition des vitesses est invariante par translation suivant z, soit : $\vec{V}(M) = u(y)\vec{x}$
Comme le fluide est visqueux, les parois des plaques fixes imposent une condition limite à la vitesse : la vitesse du fluide qui touche une paroi doit être égale à celle de la paroi : c'est la **condition d'adhérence**.

Lorsque le fluide est visqueux, il faut rajouter dans le 2e membre de l'équation du mouvement (c'est l'éq. d'Euler si le fluide est parfait) les forces de frottement d'origine visqueuse. Si le fluide est newtonien, sa viscosité est constante pour une température donnée. Les efforts visqueux sont alors proportionnels aux gradients de vitesses. La formulation de ces efforts visqueux est simple dans le cas de l'écoulement entre deux plaques car le champ de vitesse est unidirectionnel, $\vec{V}(M) = u(M)\vec{x}$.



Cas où les deux plaques sont fixes.
On a comme conditions limites :

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Rightarrow \quad u = 0 \\ y = a \quad &\Rightarrow \quad u = 0 \end{aligned} \qquad \text{(XIII-2)}$$

on cherche une vitesse $\vec{V}$ dont les composantes sont telles que :

$$u = u(y) \quad v = w = 0 \qquad \text{(XIII-3)}$$

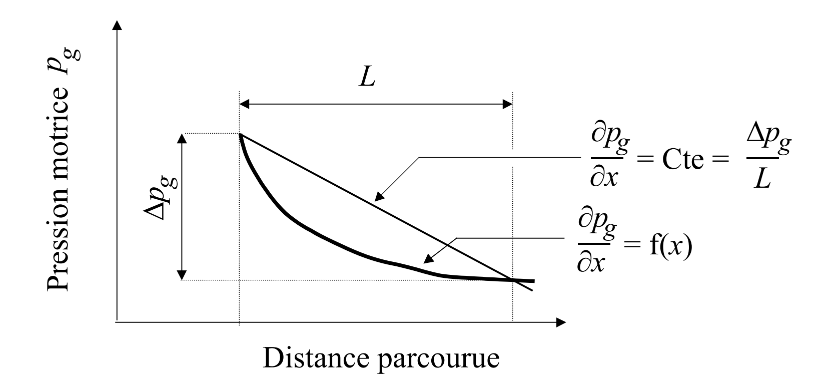
Après calculs, on trouve pour la composante u :

$$u(y) = \frac{a^2}{2\mu}\frac{dp_g}{dx}\left[\frac{y^2}{a^2} - \frac{y}{a}\right] \qquad \text{(XIII-4)}$$

dp_g / dx est appelé gradient de pression motrice de l'écoulement ; c'est une chute de pression motrice ***proportionnelle*** à la longueur parcourue : la chute de pression divisée par la longueur parcourue est constante car l'écoulement est établi (la pression motrice décroît linéairement, voir la figure ci-dessous). Ainsi, entre deux sections distantes d'une longueur L on a :

$$\frac{dp_g}{dx} = \frac{p_{g2} - p_{g2}}{x_2 - x_1} = -\frac{\Delta p_g}{L} \qquad \text{(XIII-5)}$$

Pour déterminer la dérivée de la pression motrice par rapport à x il n'est donc pas obligatoire de se ramener au voisinage d'un point. La distinction des deux cas où $dp_g / dx = Cte$ et $dp_g / dx = f(x)$ sont illustrés ci-dessous.



Entre les deux plaques, on a une distribution de contraintes visqueuses donnée par :

$$\sigma_{yx} = -\frac{1}{12\mu}\frac{dp_g}{dx}a^3 \qquad \text{(XIII-6)}$$

Le débit volumique est l'intégrale de u sur une section droite ;

$$q_V = \int_0^a u(y)dy \int_z dz = -\frac{a^3}{12\mu}\frac{\partial p_g}{\partial x}\int_z dz \qquad \text{(XIII-7)}$$

On choisit d'exprimer ici le débit par unité de largeur (la largeur est perpendiculaire à la figure, soit z) ; ce débit unitaire est donné par :

$$q_V' = \frac{q_V}{\int_z dz}$$

$$q_V' = \int_0^a u(y)dy = -\frac{a^3}{12\mu}\frac{\partial p_g}{\partial x} = \frac{a^3}{12\mu}\frac{\Delta p_g}{L} \qquad \text{(XIII-8)}$$

La **vitesse moyenne** de l'écoulement est obtenue à partir du débit et de l'aire A d'une section de passage de référence S perpendiculaire à l'écoulement:

$$A = \int_0^a dy \int_z dz$$

$$V_q = \frac{q_V}{A} = \frac{a^2}{12\mu}\frac{\Delta p_g}{L} \qquad \text{(XIII-9)}$$

Le point où la vitesse est maximale est situé à :

$$y = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad u_{\max} = \frac{3}{2}V_q \qquad \text{(XIII-10)}$$

La vitesse maximale est ici 1,5 fois plus grande que la vitesse moyenne.

XIII-4 Ecoulement laminaire développé établi dans une conduite de section circulaire

La « longueur d'entrée », L_E, est la longueur de tuyau entre l'entrée du tube et la position où l'écoulement laminaire est complètement développé et établi. Cette longueur est donnée par une formule empirique :

$$\boxed{L_E = 0{,}058\, Re\, D} \qquad \text{(XIII-11)}$$

où $D = 2R$ est le diamètre intérieur du tube et re, le nombre de REYNOLDS de l'écoulement, défini à partir de la vitesse moyenne V_q du diamètre D, de la masse volumique ρ et de la viscosité dynamique μ du fluide :

$$Re = \frac{\rho V_q D}{\mu} \qquad \textbf{(XIII-12)}$$

La vitesse de l'écoulement établi est ici aussi de la forme :

$$\vec{V} = u\vec{x} \qquad \text{(XIII-13)}$$

où l'on peut montrer que u ne dépend que du rayon r dans une section droite ($0 \le r \le R$).
La vitesse vérifie la condition d'adhérence sur la paroi :

$$r = R \quad \Rightarrow \quad u = 0 \qquad \text{(XIII-14)}$$

Le profil des vitesses dans la section droite est :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p_g}{\partial x}\left(r^2 - R^2\right) \qquad \text{(XIII-15)}$$

Le gradient de pression motrice est ici aussi une constante pour un écoulement donné ; on a donc, entre deux sections distantes de L :

$$\frac{\partial p_g}{\partial x} = -\frac{\Delta p_g}{L} \qquad \textbf{(XIII-16)}$$

Le profil de vitesse peut donc s'écrire :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p_g}{L}R^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \textbf{(XIII-17)}$$

la distribution de contrainte est donnée par :

$$\sigma_{rx} = \mu\frac{du}{dr} = \frac{r}{2}\frac{\partial p_g}{\partial x} \qquad \text{(XIII-18)}$$

Le débit en volume vérifie la formule célèbre ci-dessous, connue sous le nom de « loi de POISEUILLE » :

$$q_V = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p_g}{L} \qquad \textbf{(XIII-19)}$$

On remarque que la loi de Poiseuille donne une relation de proportionnalité entre : le débit et le gradient de pression motrice. Si on appelle *«conductance»* le terme :

$$\sigma = \frac{\pi R^4}{8\mu} \qquad \text{(XIII-20)}$$

et que l'on note

$$\alpha = \frac{\Delta p_g}{L} \qquad \text{(XIII-21)}$$

le gradient de pression motrice de l'écoulement, on a la relation :

$$\boxed{q_V = \alpha\sigma} \text{ ou : } \boxed{\alpha = \frac{q_V}{\sigma}} \qquad \textbf{(XIII-22)}$$

On appelle **conductance** le terme σ .

La vitesse moyenne de l'écoulement est :

$$\boxed{V_q = \frac{1}{A}\int_0^R u(r)\, 2\pi r\, dr = \frac{R^2}{8\mu}\frac{\Delta p_g}{L}} \qquad \text{(XIII-23)}$$

Le point où la vitesse est maximale se situe sur l'axe du tube, soit en $r = 0$, lorsque $du / dr = 0$:

$$\boxed{r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u_{\max} = \frac{R^2}{4\mu}\frac{\Delta p_g}{L} = 2\, V_q} \qquad \text{(XIII-24)}$$

Dans un écoulement laminaire établi dans une conduite de section circulaire, la vitesse maximale est deux fois plus grande que la vitesse moyenne.

XIV- Ecoulement dans les conduites en charge.

XIV-1 Profils des vitesses dans les tuyaux

Dans un *écoulement laminaire complètement développé*, le profil des vitesses vérifie la loi de Poiseuille :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p_g}{L} R^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{ou :} \quad \boxed{\frac{u}{V_q} = 1 - \frac{r^2}{R^2}} \qquad \text{(XIV-1)}$$

la vitesse est maximale au centre et nulle sur la paroi.

Dans un *écoulement turbulent stationnaire,* le profil des vitesses peut être représenté par la formule empirique :

$$\boxed{\frac{u}{V_q} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}} \qquad \text{(XIV-2)}$$

où l'exposant n est fonction du nombre de REYNOLDS que l'on a déjà défini plus haut.

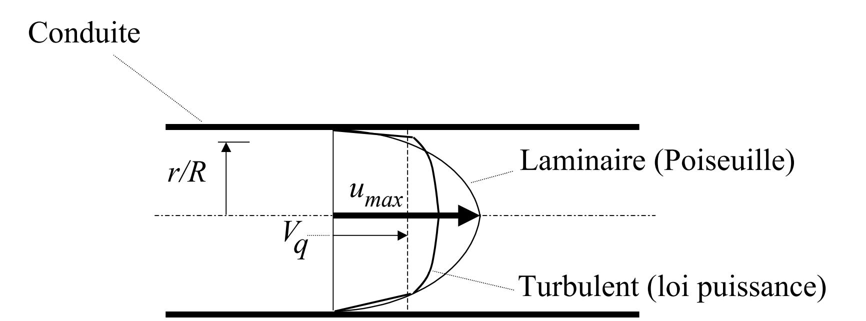
Cette formule empirique est appelée « loi puissance ». On peut préciser quelques valeurs de l'exposant n :

$$\begin{aligned} Re &= 4\times 10^3, & n &= 6 \\ Re &= 1{,}1\times 10^5, & n &= 7 \\ Re &= 3{,}2\times 10^6, & n &= 10 \end{aligned} \qquad \text{(XIV-3)}$$

Le rapport entre la vitesse moyenne et la vitesse au centre du tube est donné par :

$$\boxed{\frac{u}{V_q} = \frac{2\, n^2}{(n+1)(2n+1)}} \qquad \text{(XIV-4)}$$

On voit que si n augmente, ce rapport augmente.
Dans la figure qui suit, on a représenté différents profils de vitesses pour l'écoulement laminaire et un écoulement turbulent dont le nombre de Reynolds est de 4000.



XIV-2 Répartition des contraintes de cisaillement (ou frottement) dans les écoulements établis (cas des conduites).

On fait les hypothèses suivantes :

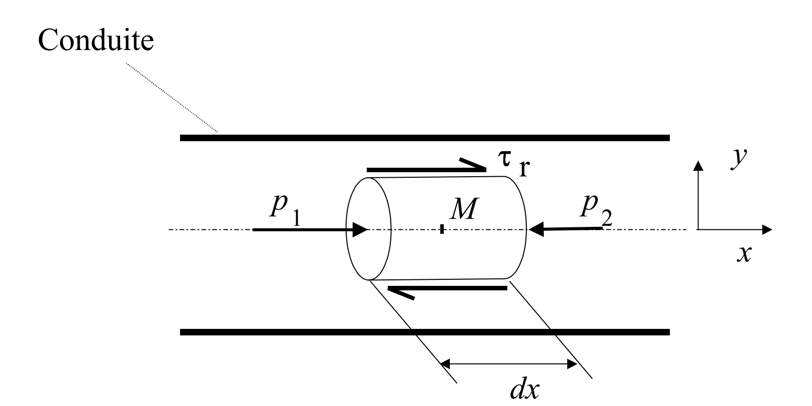
-**Ecoulement horizontal**. La pente du tube est nulle, donc : $dZ / dx = 0$. La pesanteur n'intervient pas dans le mouvement du liquide : $dp_g / dx = d(p + \rho gZ) / dx = dp / dx + \rho gdZ / dx = dp / dx$.

-**Ecoulement stationnaire**

-**Fluide incompressible**

-**Ecoulement complètement développé (établi)**

L'écoulement étant stationnaire la projection des forces extérieures au volume de contrôle suivant l'axe x est nulle :



$$\sum \vec{F} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{x} = (p_1 - p_2)\pi r^2 + \tau_r 2\pi r dx = \left[p(M) - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right]\pi r^2 - \left[p(M) + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right]\pi r^2 + \tau_{rx} 2\pi r\, dx = 0 \qquad \textbf{(XIV-5)}$$

D'où :

$$\boxed{\tau_{rx}(r) = -\frac{r}{2}\frac{\partial p}{\partial x}} \qquad \text{(XIV-6)}$$

En particulier, sur la paroi du tube ($r = R$) ,

$$\boxed{\tau_{rx} = -\frac{R}{2}\frac{\partial p}{\partial x}} \qquad \text{(XIV-7)}$$

XIV-3 Bilan d'énergie dans un tube : PERTE DE PRESSION TOTALE et PERTE DE CHARGE

Considérons une conduite horizontale comportant un changement de direction ou « coude ».
Si on applique le premier principe de la thermodynamique au volume de contrôle *D* limité par la surface *S*, on a :

$$P + P_S + P_{frottement} + P_{autre} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{M\in D} \rho(M)\, e(M)\, d\omega + \int_{M^*\in S} \left[e(M^*) + p(M^*)v(M^*)\right] \rho \vec{V}(M^*)\cdot \overrightarrow{dA}\right\} \qquad \text{(XIV-8)}$$

où le premier membre représente les puissances « produites » (au sens algébrique), et :

$$\boxed{e = u + \frac{1}{2}V^2 + gZ} \qquad \text{(XIV-9)}$$

u est l'énergie mécanique par unité de masse

Si on fait les hypothèses suivantes :

(i) $P_S = P_{frottement} = P_{autre} = 0$
(ii) écoulement stationnaire de fluide incompressible
(iii) pression et énergie interne uniforme dans le volume de contrôle,

le bilan d'énergie précédent se réduit à :

$$\boxed{\left[p_1 + \rho g Z_1 + \frac{1}{2}\rho\,\alpha_1 V_{q1}^2\right] - \left[p_2 + \rho g Z_2 + \frac{1}{2}\rho\,\alpha_2 V_{q2}^2\right] = \rho(u_1 - u_2) - \rho\frac{\delta Q}{\delta m}} \qquad \text{(XIV-10)}$$

où :

α est le coefficient d'énergie cinétique
V_q est la vitesse moyenne
$\left[p_1 + \rho g Z_1 + \frac{1}{2}\rho\,\alpha_1 V_{q1}^2\right]$ est l'énergie mécanique totale par unité de volume dans la section S1
$\left[p_2 + \rho g Z_2 + \frac{1}{2}\rho\,\alpha_2 V_{q2}^2\right]$ est l'énergie mécanique totale par unité de volume dans la section S2
$\rho(u_1 - u_2) - \rho\frac{\delta Q}{\delta m}$ est la différence d'énergie mécanique totale entre les sections S1 et S2.

On appelle perte de pression totale le terme :

$$\boxed{\Delta Pt_{1-2} = \rho(u_1 - u_2) - \rho\frac{\delta Q}{\delta m}} \qquad \text{(XIV-11)}$$

et perte de charge le terme équivalent exprimé en hauteur de fluide :

$$\boxed{\Delta H_{1-2} = \frac{\Delta Pt_{1-2}}{\rho g}} \qquad \text{(XIV-12)}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\left[p_1 + \rho g Z_1 + \frac{1}{2}\rho\,\alpha_1 V_{q1}^2\right] - \left[p_2 + \rho g Z_2 + \frac{1}{2}\rho\,\alpha_2 V_{q2}^2\right] = \Delta Pt_{1-2}} \qquad \textbf{(XIV-13)}$$

On remarquera que l'énergie mécanique totale dans une section est écrite à l'aide de la vitesse moyenne V_q dans cette section alors même que le profil des vitesses n'est pas « plat » (voir les formules donnant les vitesses). Ceci n'est possible que grâce à l'introduction du **coefficient d'énergie cinétique** α qui « corrige » la valeur moyenne de l'énergie cinétique. Il n'y a pas lieu, par contre, d'introduire de coefficient de pression pour le terme $p + \rho g Z$ puisque celui est constant dans le plan de la section droite.

XIV-4 Perte de charge régulière et perte de charge singulière

La perte d'énergie mécanique totale dans un tuyau se décompose en deux parties : la perte de charge régulière qui se produit tout le long de l'écoulement et les pertes de charge singulières qui sont localisées en des endroits précis du conduit (coude, valve, raccords, etc..)
Pour tenir compte de ceci, on écrit :

$$\Delta Pt_{1-2} = (\Delta Pt_{1-2})_{\text{rég}} + (\Delta Pt_{1-2})_{\text{sing}} \qquad \textbf{(XIV-14)}$$

XV – Calcul des pertes de charge.

XV-1 Coefficient de perte de charge régulière

Quel que soit le régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent développé), la perte de charge peut être mise sous la forme suivante :

$$\Delta Pt = \Lambda \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho V_q^{\,2} \qquad \textbf{(XIV-15)}$$

C'est la formule dite de DARCY-WEISBACH.
Cette formule est obtenue par analyse dimensionnelle, en appliquant le théorème de VASHY-BUCKINGHAM. Elle donne la chute de pression totale se produisant entre deux sections distantes de la longueur *L*, et en écoulement complètement développé.

D_h est le **diamètre hydraulique** ; il est défini à partir de l'**aire** *A* de la section droite et du **périmètre mouillé** χ par :

$$D_h = \frac{4A}{\chi} \qquad \textbf{(XIV-16)}$$

On appelle *coefficient de perte de charge régulière* le coefficient sans dimension Λ ; c'est une fonction du **nombre de Reynolds et de la rugosité ε intérieure du tube (si l'écoulement est turbulent):**

$$\Lambda = f(Re, \varepsilon) = f \times Re^k, \qquad Re = \frac{\rho V_q D_h}{\mu} \qquad \textbf{(XIV-17)}$$

Cette fonction de *Re* est notamment donnée dans le diagramme de MOODY. On peut citer aussi les travaux de NIKURADSE concernant la détermination de cette fonction.

La détermination de cette fonction consiste à trouver le coefficient *f* et l'exposant *k* du nombre de Reynolds.

On appelle **coefficient de forme** le coefficient sans dimension *f.* Il ne dépend, pour un régime d'écoulement donné, que de la forme de la section droite du tube.

Exercice : Etablir la formule de Darcy-Weibach pour un écoulement établi en supposant que la chute de pression totale ΔP_t peut-être écrite comme une fonction de : D_h, μ, L, V_q, pour un tube à paroi lisse, fonction telle que :

$$\Delta P_t = f(D_h, \mu, \rho, L, V_q) = C\, D_h^a \mu^b\, \rho^c\, L^d\, V_q^e, \qquad (1)$$

où C est une constante sans dimension.

Il s'agit donc de trouver les exposants *a,b, c, d, e,* de telle sorte que la dimension de $C\, D_h^a \mu^b\, \rho^c\, L^d\, V_q^e$ soit identique à celle de ΔP_t, soit : $[\Delta P_t] = \mathbf{ML^{-1}T^{-2}}$.

Les dimensions de chacun des termes influençant la perte de charge sont :

$[D_h] = \mathbf{L}$; $[\mu] = \mathbf{ML^{-1}T^{-1}}$; $[\rho] = \mathbf{ML^{-3}}$; $[V_q] = \mathbf{LT^{-1}}$; $[\mu] = \mathbf{ML^{-1}T^{-1}}$.

En exprimant que la formule (1) est homogène du point de vue dimensionnel :

$$\mathbf{ML^{-1}T^{-2}} = (\mathbf{L})^a (\mathbf{ML^{-1}T^{-2}})^b (\mathbf{ML^{-3}})^c (\mathbf{L})^d (\mathbf{LT^{-1}})^e.$$

Expérimentalement on montre que dans un écoulement établi, la perte de charge est proportionnelle à la longueur : on peut donc écrire : $d = 1$.

En développant puis en identifiant respectivement les exposants de chaque grandeur (Masse, Longueur, Temps), on a :

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a - b - 3c - e = -2 \\ -b - e = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e - 3 \\ b = -e - 2 \\ c = e - 1 \end{cases}$$

a, b, c, sont paramétrés ici par *e*. D'où :

$$\Delta P_t = C\, D_h^{e-3}\, \mu^{-e+2}\, \rho^{e-2}\, L \quad V_q^e.$$

Faisons apparaître dans la perte de charge le nombre de REYNOLDS de l'écoulement ainsi que l'énergie cinétique moyenne $\rho V_q^2/2$:

$$\begin{aligned} \Delta P_t &= C\, D_h^{e-3}\, \mu^{-e+2}\, \rho^{e-2}\, L \quad V_q^e \\ &= 2C \left[\frac{\rho^{e-2} V_q^{e-2} D_h^{e-2}}{\mu^{e-2}}\right] L\ D_h^{-1}\, \frac{1}{2}\rho V_q^2 = 2C\, \mathbf{Re}^{e-2}\, \frac{L}{D_h}\, \frac{1}{2}\rho V_q^2 \end{aligned}$$

En posant :

$f = 2C$	Coefficient de forme
$k = e - 2$	Exposant dépendant du régime d'écoulement
$\Lambda = f \cdot \mathbf{Re}^k$	Coefficient de perte de charge

on obtient :

$$\Delta P_t = \Lambda\, \frac{L}{D_h}\, \frac{1}{2}\rho V_q^2$$

XV-1-1 Cas de l'écoulement laminaire dans une conduite de section circulaire constante : *loi de Poiseuille*

L'écoulement de Poiseuille possède une solution exacte ; il est donc possible d'obtenir théoriquement le coefficient de forme directement à partir du profil des vitesses *u*.

En effet,

$$\Lambda = \frac{\Delta Pt}{L} D_h \frac{1}{\rho V_q^2} \qquad \text{(XV-1)}$$

L'intégrale de *u* figure dans la vitesse moyenne, puisque :

$$V_q = \frac{1}{A}\int_{M\in S} u(M)dA \qquad \text{(XV-2)}$$

Les courbes expérimentales montrent que si l'écoulement est laminaire développé,

$$k = -1 \qquad \text{(XV-3)}$$

On a donc, en se rappelant que $V_q = q_V / A$, avec $A = \pi R^2$ et $\chi = 2\pi R$:

$$f = Re\frac{\Delta Pt}{L}D_h\frac{2}{\rho V_q^2} = \frac{\rho V_q D_h}{\mu}\frac{\Delta Pt}{L}D_h\frac{2}{\rho V_q^2} = \frac{\Delta Pt}{L}\frac{32A^3}{\mu\chi^2 q_V} = \frac{\Delta Pt}{L}\frac{32\pi^3 R^6}{\mu\chi^2 q_V} \qquad \text{(XV-4)}$$

On exprime le débit grâce la loi de Poiseuille en utilisant :

$$q_V = \alpha\sigma = \frac{\Delta Pt}{L}\frac{\pi R^4}{8\mu} \qquad \text{(XV-5)}$$

D'où :

$$f = \frac{\Delta Pt}{L}\frac{32\pi^3 R^6}{\mu 4\pi^2 R^2 \frac{\Delta Pt}{L}\frac{\pi R^4}{8\mu}} \qquad \text{(XV-6)}$$

Après simplifications, on obtient la valeur *entière* :

$$\boxed{f = 64} \qquad \textbf{(XV-7)}$$

On notera bien que c'est une valeur *exacte* (et non déduites de mesures).
L'écoulement entre deux plaques fixes parallèles possède aussi une solution exacte (écoulement de Couette) ; son coefficient de forme vaut : $f = 96$.

XV-1-2 Cas des conduites cylindriques de section non circulaires

En écoulement laminaire, et lorsque la section n'est pas circulaire, (cas des échangeurs de chaleur…), on peut calculer le coefficient de forme à condition que l'on ait au préalable déterminé le profil des vitesses *u* dans la section droite.

Si **on défini les variables sans dimension suivantes** : (μ viscosité dynamique du fluide, α est le gradient de pression motrice, *a* est une longueur caractéristique de la section droite, par exemple la longueur du côté si la section est rectangulaire)

$u^* = \frac{\mu}{\alpha a^2}u$ (vitesse normalisée)

$x^* = x/a$, $y^* = y/a$, $z^* = z/a$ (coordonnées normalisées)

S devient S^* (section en coordonnées normalisées)

l'équation du mouvement permanent du fluide suivant l'axe du tube se ramène à une *équation de Poisson* :

$\boxed{\Delta u^* = -1}$ dans la section de passage,
$u^* = 0$, sur le bord de la section de passage S^* (condition d'adhérence sur la paroi)

La résolution de cette équation de Poisson est possible par des *méthodes numériques* (différences finies ou éléments finis si le contour est «complexe»). Le profil des vitesses u^* étant connu, **on peut trouver par intégration la conductance** (en valeur adimensionnelle) :

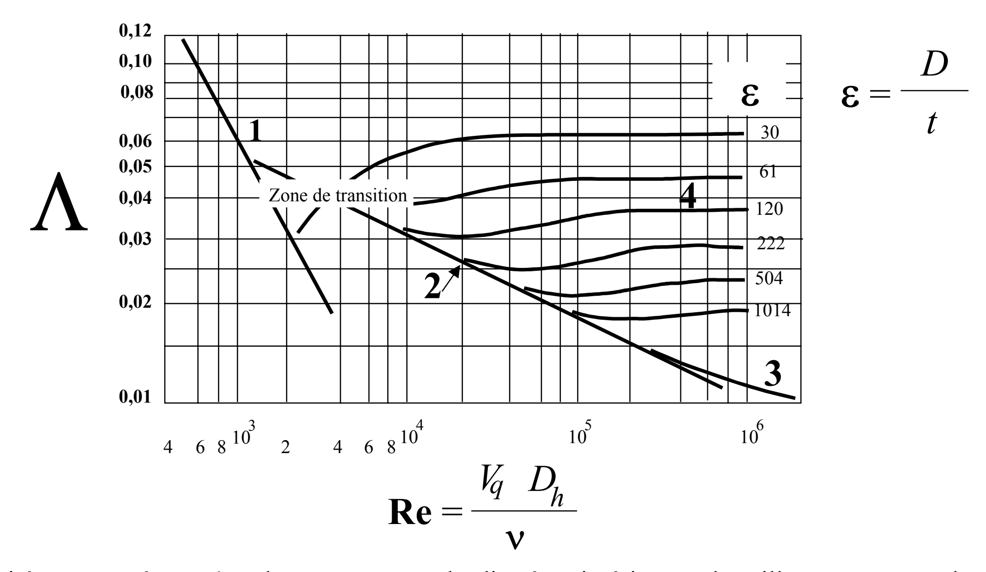
$$\sigma^* = \frac{\mu}{a^4}\sigma = \int_{M \in S^*} u^*(M)\, dy^*\, dz^* \qquad \text{((XV-8)}$$

D'où la valeur du coefficient de forme (en notant A^* l'aire de S^* et $\chi^* = \chi / a$ le périmètre normalisé de S^*)

$$f = \frac{32 A^{*3}}{\sigma^* \chi^{*2}} \qquad \textbf{(XV-9)}$$

XV-1-3 Cas de l'écoulement turbulent établi.

Pour les écoulements turbulents on doit utiliser des résultats expérimentaux pour déterminer le coefficient de perte de charge Λ en fonction du nombre de REYNOLDS Re. Ces résultats sont présentés dans un diagramme dit de MOODY, tel que celui de la figure ci-dessous qui s'applique aux conduites circulaires*.



La « rugosité » est notée ε, c'est le rapport entre le diamètre intérieur et la taille moyenne, t, des aspérités : $\varepsilon = D/t$. C'est un paramètre important pour l'écoulement turbulent.

Les différentes courbes correspondent aux formules suivantes :

1 → Loi de **POISEUILLE** : $\Lambda = \dfrac{64}{\text{Re}}$;

2 → Loi de **BLASIUS**, conduites lisses : $\Lambda = \dfrac{0{,}316}{\text{Re}^{1/4}}$;

3 → Formule de **KARMAN-PRANDTL** : $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2\,\log_{10}\left[\text{Re}\sqrt{\Lambda}\right] - 0{,}8$

4 → Formule de **KARMAN-PRANDTL** : $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2\,\log_{10}\dfrac{D}{t} + 1{,}14$

---

* Les résultats tracés ici sont ceux de NIKURADSE.

En résumé, si on veut calculer les pertes de charge régulières d'un écoulement en régime turbulent, on doit suivre la démarche suivante :

(a) Evaluer le nombre de Reynolds par la formule : $Re = \rho V_q D_h / \mu$; en régime turbulent, $\text{Re} >> 2000$.
(b) Evaluer la rugosité intérieure ε de la conduite
(c) En déduire le coefficient de perte de charge Λ grâce au **diagramme de MOODY** ou à des formules empiriques fournies dans les ouvrages d'hydraulique.
(d) Calculer le perte de charge, soit en unité SI de pression (Pa), soit en hauteur équivalent de liquide, en appliquant : $\Delta Pt = \Lambda \dfrac{L}{D_h} \dfrac{1}{2} \rho V_q^2$

Si la conduite est lisse, (rugosité nulle) on se rappellera que la **loi de BLASIUS** est applicable ($f = 0{,}316$ et $k = -1/4$) pour le régime turbulent, soit :

$$\Lambda = 0{,}316 \times Re^{-1/4} \qquad \textbf{(XV-10)}$$

XV-2 Coefficient de perte de charge singulière

La perte de charge singulière est exprimée en fraction de l'énergie cinétique du fluide à l'entrée de la singularité. On utilise la formule suivante si cette perte singulière est exprimée en unité de pression :

$$\Delta Pt_{\text{sing}} = K \frac{1}{2} \rho V_q^2$$

Homogène à une pression ($\mathbf{ML^{-1}T^{-2}}$, Pa en unité SI) **(XV-11)**

ou la formule suivante si cette perte singulière est exprimée en hauteur équivalent de fluide :

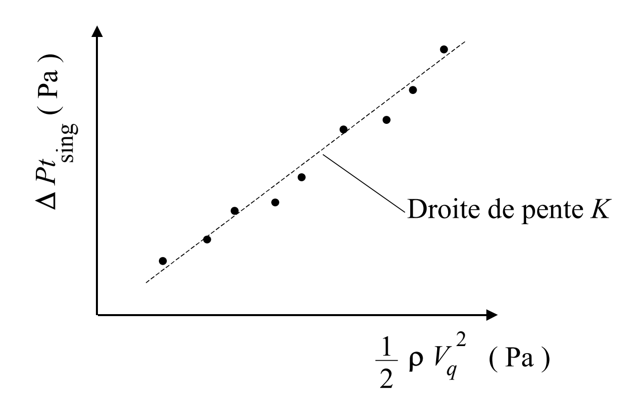
$$\Delta H_{\text{sing}} = K \frac{1}{2g} V_q^2$$

Homogène à une longueur (**L**, mètre en unité SI) **(XV-12)**

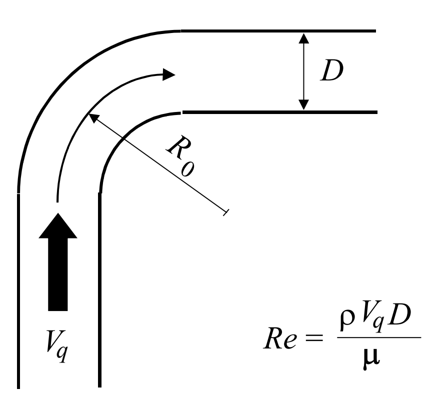
Le coefficient *K* est appelé coefficient de perte charge singulière ; il est sans dimension. Ce coefficient est parfois noté ξ.
Le problème pour l'ingénieur est alors de savoir déterminer le coefficient *K*.

De nombreuses études expérimentales ont été réalisées et leurs résultats sont publiés dans des bases de données pour l'hydraulique. On peut ainsi obtenir pour la plupart des singularités usuelles (coudes, réductions, vannes, raccords, etc…) la valeurs du coefficient *K* en fonction des caractéristiques géométriques des singularités et du nombre de Reynolds Re.

Il est toujours possible de déterminer soi-même *K*. Pour cela il faut mesurer simultanément la perte de charge entre l'entrée et la sortie de la singularité et la vitesse moyenne en entrée (ou le débit q_V), puis tracer le graphe de ΔPt_{sing} en fonction de $\rho V_q^2 / 2$; le coefficient cherché est alors la pente du nuage de points.



Il faut noter que *pour le même nombre de Reynolds*, des singularités « homothétiques » auront le même coefficient *K*.
Par exemple, pour le même nombre de Reynolds *Re*, deux coudes « droits » (angle de 90°) ayant le même rapport rayon de courbure/diamètre (soit $\frac{R_0}{D}$) auront le même coefficient *K*.

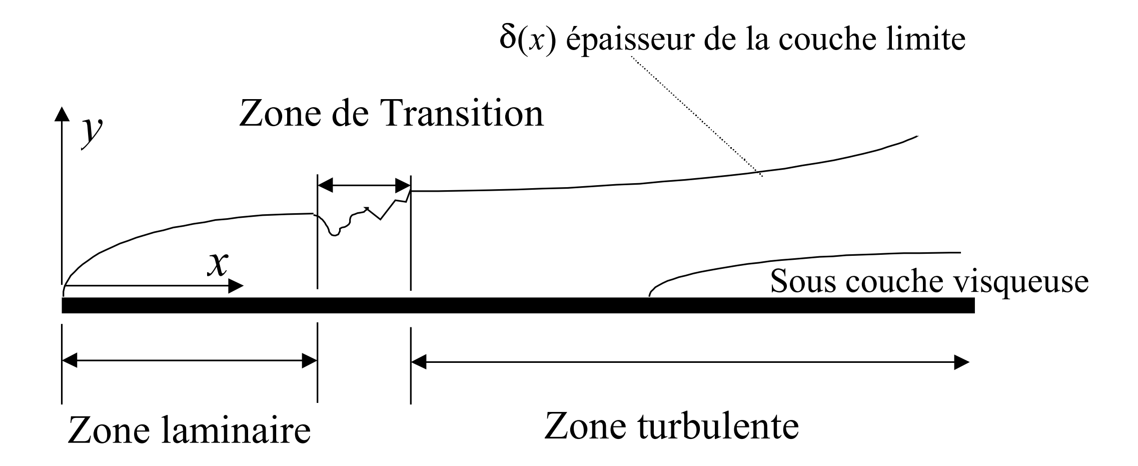


XVI – Quelques éléments sur la théorie de la couche limite

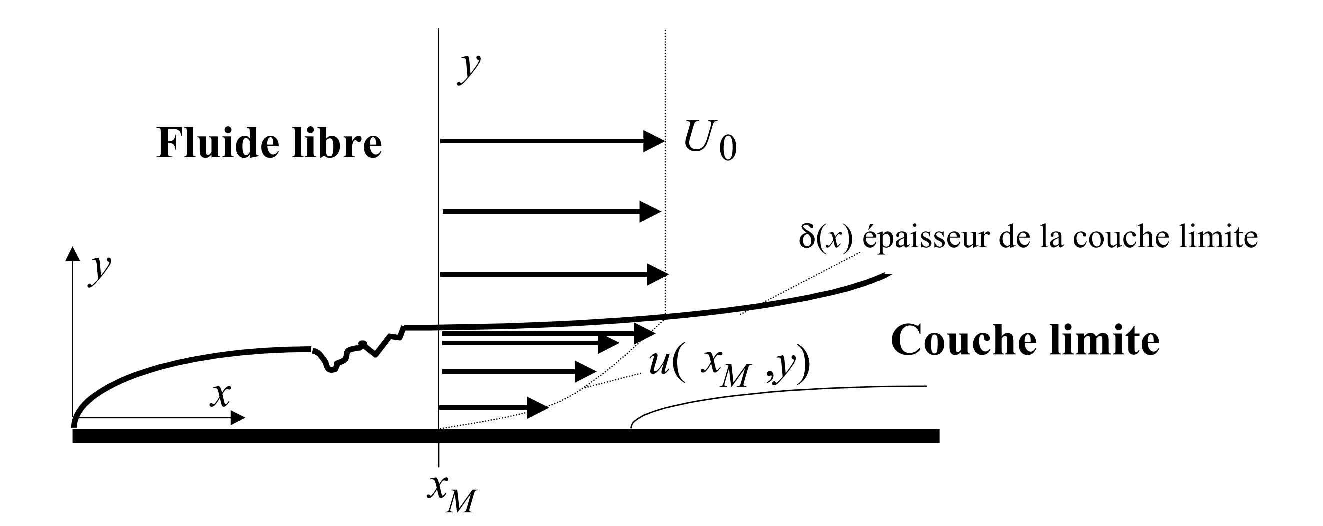
XVI-1 Introduction

Les écoulements de couche limite sont caractéristiques des fluides visqueux en mouvement relatifs près d'une paroi solide.
La *couche limite* est la région du fluide en mouvement proche d'une paroi solide. Cette zone est particulièrement sensible aux effets de la viscosité.
Une **zone laminaire** débute au bord d'attaque ($x = 0$) et son épaisseur augmente à mesure que l'écoulement avance le long de la paroi.
Il se crée alors une zone de **transition laminaire-turbulent** après laquelle *l'épaisseur de la couche limite* augmente.
Il existe dans la **zone turbulente** une *sous couche visqueuse* dans laquelle les effets visqueux (liés aux ***frottements*** entre couches de fluides animées de vitesses différentes) sont prédominants devant les effets d'inertie (liés à la mise en mouvement des ***masses*** fluides).

On représente le *développement de la couche limite* sur une plaque plane dans la figure ci-dessous :



On appelle **épaisseur de la couche limite** la distance δ entre le fluide et paroi à partir de laquelle la vitesse du fluide est égale à 99% la vitesse U_0 du fluide libe (non perturbé par la paroi).



On appelle épaisseur de déplacement δ^* la longueur du déplacement qu'il faudrait appliquer à la paroi solide pour conserver le même débit en masse à un écoulement de fluide parfait hypothétique.

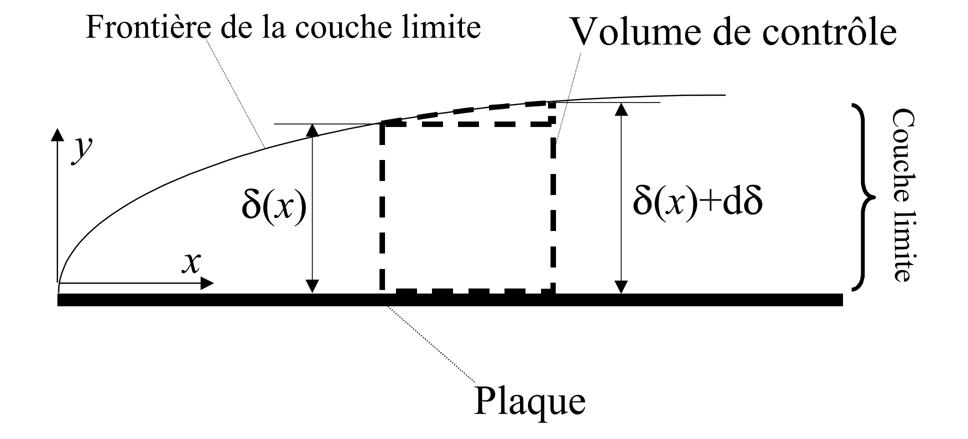
On a, en fluide incompressible :

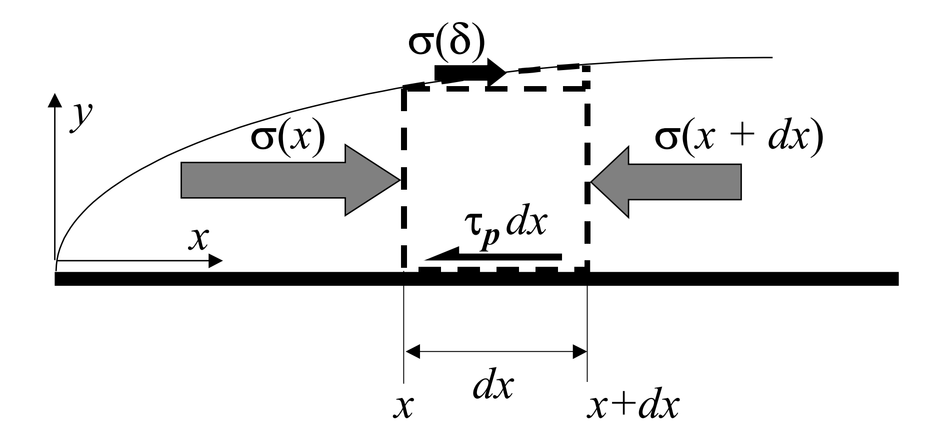
$$\delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \frac{u(x_M, y)}{U_0} \right] dy \qquad \text{(XVI-1)}$$

XVI-2 Equation intégrale

Admettant que la pression motrice s'identifie à la pression statique p dans la section droite et que de plus p est constante dans cette section, la **résultante** des forces suivant la direction x s'écrit :

$$dF_X = \sigma(x) - \sigma(x + dx) + \sigma(\delta) - \tau_p dx \qquad \text{(XVI-2)}$$





Où τ_p est la contrainte de frottement sur la paroi.

En considérant *une unité de longueur perpendiculairement à la figure*, on a comme force :

$$\sigma(x) = p \times \delta\,, \qquad \sigma(x+dx) = \left[p(x) + \frac{dp}{dx}dx \right] \times (\delta + d\delta)$$

$$\sigma(\delta) = \left[p(x) + \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}dx \right] \times d\delta$$

$$dF_x = p \times \delta - \left[p(x) + \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}dx \right] \times (\delta + d\delta) + \left[p(x) + \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}dx \right] d\delta - \tau_p dx \qquad \text{(XVI-3)}$$

Si l'on combine le flux de quantité de mouvement suivant x avec l'équation de conservation de la masse pour le volume de contrôle choisi, on obtient la forme générale de l'équation intégrale de quantité de mouvement :

$$\boxed{-\delta \frac{dp}{dx} - \tau_p dx = \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \rho u^2 dy \right] - U_0 \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \rho u\, dy \right]} \qquad \text{(XVI-4)}$$

Si l'on veut évaluer l'épaisseur de couche limite pour un écoulement laminaire de fluide incompressible au des-sus d'une plaque plane, il faut :

(i) Déterminer le gradient de pression dp/dx en dehors de la couche limite (par une étude en écoulement potentiel) ;

(ii) Se donner une expression analytique plausible pour le profil de vitesses $u(y)$ dans la couche limite ;

(iii) Utiliser comme formule pour la contrainte visqueuse (frottement), la loi de Newton :

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

XVI-3 Ecoulement dans la couche limite d'une plaque plane

On prend les hypothèses suivantes :

L'écoulement extérieur possède une vitesse constante : $U_0 = Cte$;

La pression est constante : $\frac{dp}{dx} = 0$.

Le fluide est incompressible : $\rho = Cte$.

L'équation intégrale de quantité de mouvement se « simplifie » et conduit à :

$$\tau_p = -\rho U_0^{\,2} \frac{d}{dx}\left\{\int_0^{\delta}\left[\frac{u^2}{U_0^{\,2}} - \frac{u}{U_0}\right] dy\right\} = \rho U^2 \frac{d}{dx}\left\{\int_0^{\delta}\frac{u}{U_0}\left[1-\frac{u}{U_0}\right] dy\right\}$$

Soit la variable sans dimension définie en x donné :

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad \Rightarrow \quad dy = \delta \, d\eta$$

On obtient :

$$\boxed{\tau_p = \rho U_0^{\,2} \frac{d\delta}{dx}\int_0^{1}\frac{u}{U_0}\left[1-\frac{u}{U_0}\right] dy} \qquad \text{(XVI-5)}$$

C'est **l'équation intégrale des quantités de mouvement pour un écoulement sans gradient de pression ;** cette expression de la contrainte de frottement est restreinte au cas suivant, rappelons-le :

(i) Ecoulement stationnaire sans forces de pesanteur (le fluide est dit ***« non-pesant »***) ;
(ii) Ecoulement incompressible bidimensionnel ;
(iii) Ecoulement le long d'une plaque plane.

XVI-4 Equation intégrale pour un écoulement sans gradient de pression ($dp/dx = 0$)

A/ Ecoulement laminaire le long d'une plaque plane

On se donne la forme du profil de vitesses :

$$u(y) = A + By + Cy^2$$

c'est un polynôme de degré 2 en y. Il doit vérifier les conditions limites : adhérence sur la plaque (1ère condition), raccordement avec l'écoulement extérieur de vitesse U_0 (2ème et 3ème condition) :

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Rightarrow \quad u = 0 \\ y = \delta \quad &\Rightarrow \quad u = U_0 \\ y = \delta \quad &\Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(XVI-6)}$$

En injectant l'expression polynomiale ci-dessus dans la formule de τ_p vue plus haut et en appliquant la loi de Newton pour le membre de gauche, on obtient :

$$\boxed{\tau_p = \frac{2\mu U_0}{\delta}} \qquad \text{(XVI-7)}$$

Par définition, le coefficient de frottement est donné par le rapport entre la contrainte de frottement et l'énergie cinétique (ou pression dynamique) de l'écoulement extérieur :

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}} \qquad \text{(XVI-8)}$$

Dans le cas présent, on peut montrer que :

$$\boxed{C_f = \frac{0{,}730}{\sqrt{Re(x)}}} \quad \text{(XVI-9)}$$

Où $Re(x)$ est le nombre de REYNOLDS à l'abscisse x :

$$Re(x) = \frac{\rho U_0 x}{\mu} \quad \text{(XVI-10)}$$

L'épaisseur de la couche limite est donnée par :

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}48}{\sqrt{Re(x)}}} \quad \text{(XVI-11)}$$

L'épaisseur de déplacement est donnée par :

$$\boxed{\frac{\delta *}{x} = \frac{1{,}835}{\sqrt{Re(x)}}} \quad \text{(XVI-12)}$$

B/ Ecoulement turbulent le long d'une plaque plane

On se donne la forme du profil de vitesse :

$$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{(XVI-13)}$$

la contrainte de frottement, déterminée expérimentalement (PRANDTL), vérifie :

$$\tau_p = 0{,}0225\, \rho U_0^2 \left(\frac{\mu}{\rho U_0 \delta}\right)^{1/4} \quad \text{(XVI-14)}$$

L'épaisseur de la couche limite est donnée par :

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}37}{Re(x)^{1/5}}} \quad \text{(XVI-15)}$$

Le coefficient de frottement sur la paroi est donné par :

$$C_f = \frac{0{,}0577}{Re(x)^{1/5}} \text{, lorsque : } 5\times 10^5 < Re(x) < 10^7 \quad \text{(XVI-16)}$$

XVI-5 Coefficients de frottement des plaques lisses en écoulement turbulent

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^5, le coefficient de frottement C_f est exprimé par une formule déduite de résultats expérimentaux :

$$C_f = 0{,}074\, Re_L^{-1/5} \text{, lorsque : } \quad 5\times 10^5 < Re_L < 10^7 \quad \text{(XVI-17)}$$

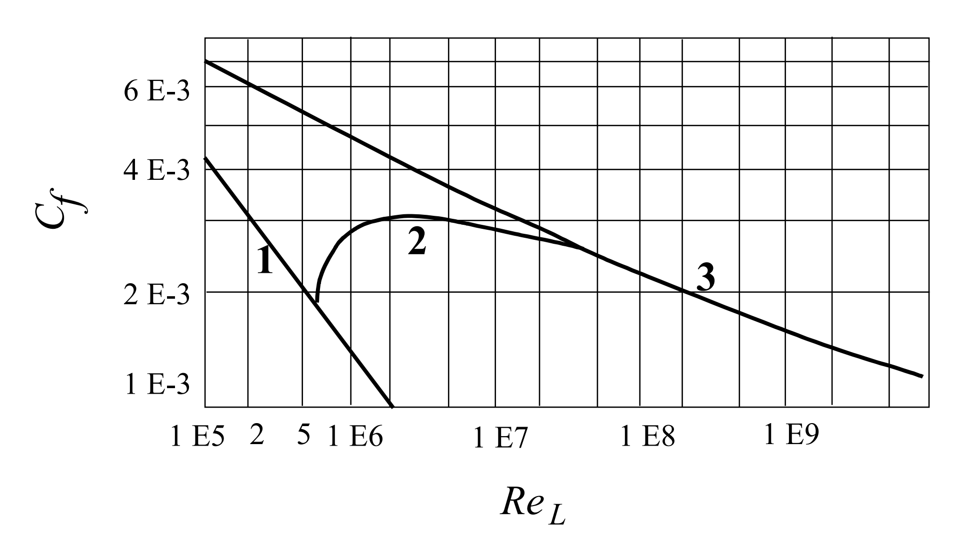
$$C_f = \frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}} \text{, lorsque : } \quad Re_L > 10^7 \text{ (d'après H. SCHLICHTING)} \quad \text{(XVI-18)}$$

où

$$Re_L = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$$

est le nombre de Reynolds défini à partir de la longueur de la plaque.

La figure ci-dessous représente le coefficient de frottement C_f du fluide léger sur la paroi d'une plaque plane lisse en fonction du nombre de Reynolds Re_L .



Courbe **1** : Ecoulement laminaire.
Courbe **2** : Ecoulement de transition laminaire-turbulent
Courbe **3** : Ecoulement turbulent.